Prof. N. A'Campo Herbstsemester 2008

Übungen zur Vorlesung Optimierung und Geometrie I

6. Aufgabenblatt

Aufgabe 1. Sei M eine kompakte orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit. Sei $u := [\alpha] \in H^k_{dR}(M, \mathbb{R})$ die Kohomologieklasse zu der geschlossenen k-Differentialform α. Es gilt $u = \{[\alpha + d\beta]\}$ wobei β die Menge der $(k-1)$-Differentialformen auf M durchläuft. Wir nehmen an, dass β derart gewählt worden ist, so dass

$$E(\alpha + d\beta) := \int_M (\alpha + d\beta) \wedge *(\alpha + d\beta)$$

minimal ist. Zeige, dass $\alpha + d\beta$ harmonisch ist. Zeige, dass E auf u konvex ist. Zeige, dass ein harmonisches γ in u ein Minimum für E ist. Beweise nun: *Jede deRahm-Kohomologieklasse auf M lässt sich eindeutig durch eine harmonische Differentialform darstellen.*

Aufgabe 2. Sei u eine Konjugationsklasse in $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$. Man minimiere auf u die Funktion $E(A) := \mathrm{Spur}(A^t \circ A)$. Für welche Klasse u wird das Minimum angenommen? Wie oft?

Aufgabe 3. Sei $\sigma := \lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \cdots$ das Spektrum des Laplaceoperators einer kompakten Riemannschen Mannigfaltigkeit M aufsteigend mit Multiplizitäten aufgelistet. Bestimmt σ die Dimension von M?

Aufgabe 4. Sei $\mu := \delta_\sigma := \sum_k \delta_{\lambda_k}$. Betrachte μ als Mass auf $\mathbb{R}_+$. Für $j \in \mathbb{N}$ sei $m_j : [0,1] \to \mathbb{R}$ die monomiale Funktion $m_j(t) = t^j$. Zeige, wobei $n := \mathrm{Dim}(M)$ ist:

$$\lim_{t \to 0, t > 0} t^{n/2} \int_0^{+\infty} m_j(e^{-t\lambda}) e^{-t\lambda} d\mu(\lambda) = \frac{\mathrm{Vol}(M)}{(4\pi)^{n/2}\Gamma(n/2)} \int_0^{+\infty} m_j(e^{-t}) t^{(n/2-1)} dt$$

Hier ist $\Gamma(z) := \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$. Hinweis: Benütze die Weylsche asymptotische Entwicklung für $\sum_k e^{-t\lambda_k}$.

Aufgabe 5. Sei $\kappa : [0,1] \to \mathbb{R}$ die Funktion mit $\kappa(t) = 0, 0 \leq t < 1/e$ und $\kappa(t) = 1/t, 1/e \leq t \leq 1$. Sei $N(\lambda) := \#\{k \mid 0 < \lambda_k \leq \lambda$. Zeige:

$$\lim_{t \to 0, t > 0} N(1/t) t^{n/2} =$$

$$\lim_{t \to 0, t > 0} t^{n/2} \int_0^{+\infty} \kappa(e^{-t\lambda}) e^{-t\lambda} d\mu(\lambda) =$$

$$\frac{\mathrm{Vol}(M)}{(4\pi)^{n/2}\Gamma(n/2)} \int_0^1 t^{(n/2-1)} dt =$$

$$\frac{\mathrm{Vol}(M)}{(4\pi)^{n/2}\Gamma(n/2+1)}$$

Hinweis: Approximiere κ auf $[0,1]$ punktweise monotone absteigend mit Polynome.

Wir erhalten für $N(\lambda)$ die asymptotische Entwicklung:

$$N(\lambda) ::: \frac{\mathrm{Vol}(M)}{(4\pi)^{n/2}\Gamma(n/2+1)}\lambda^{n/2}$$