Prof. N. A'Campo Wintersemester 2006/07

Übungen zur Vorlesung Analysis

11. Aufgabenblatt

Aufgabe 1. Sei $D^n := \{p \in \mathbb{R}^n \mid ||p||_{\text{Eukl.}} \leq 1\}$ die Euklidische Einheitskugel im n-dimensionalen Euklidischen Raum mit Norm $||p||^2_{\text{Eukl.}} := x_1(p)^2 + x_2(p)^2 + \cdots + x_n(p)^2$. Sei $f : D^n \to D^n$ stetig. Sei $F : \mathbb{R}^n \to D^n$ die Abbildung mit $F(p) := f(\frac{1}{\text{Max}(1, ||\text{p}||_{\text{Eukl.}})} p)$. Zeige, dass F gleichmässig stetig ist.

Aufgabe 2. Sei $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbar mit Träger in D^n und mit $\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \phi(p) dx_1 dx_2 \cdots dx_n = 1$. Sei $\phi_\lambda(p) := \frac{1}{\lambda^n} \phi(\lambda p)$. Zeige, dass $F_\lambda := \phi_\lambda * F$ den Raum $\mathbb{R}^n$ in D^n abbildet. Zeige, dass für die gleichmässige Konvergenz gilt: $\lim_{\lambda \to \infty} F_\lambda = F$. Bemerke, dass die Abbildungen F_λ beliebig oft differenzierbar sind.

Aufgabe 3. Wir möchten den Satz von Brouwer beweisen: *Jede stetige Abbildung $f : D^n \to D^n$ hat einen Fixpunkt.* Dazu die Annahme, ein f wie im Satz habe keinen Fixpunkt. Diese Annahme führen wir in den Aufgaben $4, 5$ zu einem Widerspruch, und somit ist der Satz von Brouwer bewiesen.

Aufgabe 4. Sei f_λ die Einschränkung von F_λ auf D^n. Zeige, dass ein $\lambda_0 > 0$ existiert derart, dass f_{λ_0} keinen Fixpunkt hat. Sei $g : D^n \to \partial D^n$ die Abbildung derart, dass für alle $p \in D^n$ die Punkte $f_{\lambda_0}(p), p, g(p)$ in dieser Reihenfolge kollinear sind. Zeige, dass g stetig differenzierbar ist. Zeige $g(p) = p$ für$p \in \partial D^n$. Seien $g_1, g_2, \cdots, g_n$ Funktionen auf D^n mit $g(p) = g_1(p)e_1 + \cdots + g_n(p)e_n$, wobei $e_i \in \mathbb{R}^n, i = 1, \cdots, n$ die Standardbasisvektoren sind.

Schreibe und begründe die Widerspruchszeile:

$$0 \neq \int_{D^n} dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n = \int_{\partial D^n} x_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n =$$

$$\int_{\partial D^n} g_1 \wedge dg_2 \wedge \cdots \wedge dg_n = \int_{D^n} dg_1 \wedge dg_2 \wedge \cdots \wedge dg_n = 0$$

Aufgabe 5. Sei X ein topologischer Raum, der zu D^n homöomorph ist, und sei $g : X \to X$ stetig. Zeige, dass g einen Fixpunkt hat.

Aufgabe 6. Sei $f : D^n \to D^n$ stetig mit $f(p) = p$ für $p \in \partial D^n$. Zeige, dass f surjektiv ist. Hinweis: Wir nehmen an, dass $0 \notin \text{Bild}(f)$ gilt. Hat $g : D^n \to D^n, g(p) := \frac{-f(p)}{||f(p)||}$ Fixpunkte?

Aufgabe 7. Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig mit $||f(p) - p||_{Eukl.} \leq 1, p \in \mathbb{R}^n$. Zeige, dass f surjektiv ist. Hinweis: Bilde mit der Umkehrung einer stereographischen Projektion π den Raum $\mathbb{R}^n$ auf $Y := \{p \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_1(p)^2 + \cdots + x_n(p)^2 + x_{n+1}(p)^2 = 1, x_{n+1} > 0\}$ ab. Sei X der Abschluss von Y in $\mathbb{R}^{n+1}$. Betrachte $g := \pi^{-1} \circ f \circ \pi : Y \to Y$ und die stetige Erweiterung $G : X \to X$ von g.

Aufgabe 8. Sei $X : D^n \to \mathbb{R}^n$ ein stetiges Vektorfeld mit $X(p) = -p, p \in \partial D^n$. Zeige, dass X in D^n eine Nullstelle hat.

Aufgabe 9. Sei $X : S^2 \to \mathbb{R}^3$ ein stetiges Tangentialvektorfeld an S^2. Hier ist $S^2 := \{p \in \mathbb{R}^3 \mid x_1(p)^2 + x_2(p)^2 + x_3(p)^2 = 1\}$. Zeige, dass X eine Nullstelle hat. Hinweis: Bearbeite die Übungen $10, 11, \cdots$.

Aufgabe 10. Sei $X : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld mit $X_0 = e_1$. Sei $||u||_{\mathrm{Max}}$ die Norm $||u||_{\mathrm{Max}} := \mathrm{Maximum}|x_1(u)|, |x_2(u)|, \cdots, |x_n(u)|$. Zeige, dass ein $\epsilon > 0$ existiert derart, dass für alle $u \in \mathbb{R}^n$ mit $x_1(u) = 0, ||u||_{\mathrm{Max}} \leq 1$ das System $X_u, e_2, e_3, \cdots, e_n$ eine Basis des Vektorraumes $\mathbb{R}^n$ bilden.

Aufgabe 11. Zeige, dass ein $\delta > 0$ existiert derart, dass für alle $u \in \mathbb{R}^n$ mit $x_1(u) = 0, ||u||_{\mathrm{Max}} \leq 1$ die Differentialgleichung zu X eine Lösungskurve $\gamma_u : [-\delta, \delta] \to \mathbb{R}^n$ mit $\gamma_u(0) = u$ hat. Zeige, dass $\delta > 0$ so gewählt werden kann, dass die Abbildung $K :]-\delta, \delta[\times]-\epsilon, \epsilon[^{n-1} \to \mathbb{R}^n$ mit $K(t, s_2, s_3, \cdots, s_n) := \gamma^{s_2 e_2 + s_3 e_3 + \cdots + s_n e_n}(t)$ injektiv mit offenem Bild ist und dass die Abbildung $K :]-\delta, \delta[\times]-\epsilon, \epsilon[^{n-1} \to \mathrm{Bild}(K)$ sowie seine Umkehrung differenzierbar sind.

Aufgabe 12. Zeige, dass $\mathrm{Bild}(K)$ eine Flusskiste um $0 \in \mathbb{R}^n$ für X ist.

Aufgabe 13. Zeige, dass man S^2 mit endlich vielen Flusskisten für X überdecken kann. Hier gilt die Annahme, dass X ohne Nullstellen ist und dass X stetig differenzierbar ist.

Aufgabe 14. Zeige, dass durch jedes $p \in S^2$ eine Lösungskurve $\gamma : \mathbb{R} \to S^2$ für X läuft. Zeige, dass eine Lösungskurve $\gamma : \mathbb{R} \to S^2$ eine Flusskiste unendlich oft besucht.

Aufgabe 15. Schliesse, dass die Differentialgleichung zu X eine periodische Lösungskurve hat.

Aufgabe 16. Schliesse, dass die Differentialgleichung zu X unendlich viele periodische Lösungskurven hat.

Aufgabe 17. Schliesse, dass X eine Nullstelle hat.

Aufgabe 18. Löse Aufgabe 9. Hinweis: Approximiere X.

Aufgabe 19. Beweise den Satz von Poincare-Bendixon: *Sei $X : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Sei $\gamma : [0, \infty[\to \mathbb{R}^2$ eine beschränkte Lösungskurve derart, dass im Abschluss des Bildes von γ das Vektorfeld X keine Nullstellen hat. Dann liegt im Abschluss des Bildes von γ eine periodische Lösungskurve.* Hinweis: Flusskisten.