Prof. N. A'Campo Wintersemester 2006/07

Übungen zur Vorlesung Analysis

2. Aufgabenblatt

Aufgabe 1. Sei V ein reeller Vektorraum der Dimension 2. Seien N, M Geraden in V, die 0 nicht enthalten. Seien $L_N, L_M : V \to \mathbb{R}$ die Linearformen mit $N = L_N^{-1}(1)$ und $M = L_M^{-1}(1)$. Konstruiere mit Zirkel und Regal die Gerade $(L_N + L_M)^{-1}(1)$.

Aufgabe 2. Berechne das Differential der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, p \in \mathbb{R}^2 \mapsto x(p)y(p)(x(p)^2 + y(p)^2 - 1) \in \mathbb{R}$. Ist f eine Morsefunktion? Zeichne die Niveaulinien von f.

Aufgabe 3. Sei V ein reeller Vektorraum der Dimension 2. Seien A, B, C, D Untervektorräume der Dimension 1 in V, die paarweise verschieden sind. Wähle $a \in A, c \in C, a \neq 0, b \neq 0$ und Linearformen $\beta, \delta : V \to \mathbb{R}$ mit $B = \beta^{-1}(0), D = \delta^{-1}(0)$. Zeige, dass die Zahl $\frac{\beta(a)\delta(c)}{\beta(c)\delta(a)}$ nur von A, B, C, D abhängt.

Aufgabe 4. Seien V, W reelle Vektorräume endlicher Dimension. Sei $A : V \to W$ linear. Wir definieren $A^* : W^* \to V^*$ wie folgt: $L \in W^* \mapsto L \circ A \in V^*$. Sei $e_1, e_2, \cdots, e_n$ eine Basis für V und sei $f_1, f_2, \cdots, f_m$ eine Basis für W. Wir notieren mit $x_1, x_2, \cdots, x_n$ und $y_1, y_2, \cdots, y_m$ die entspechenden Koordinatenfunktionen. Schreibe $A^*(y_1)$ als Linearkombination der $x_1, x_2, \cdots, x_n$. Hinweis: betrachte die Matrix von A bezüglich den Basen $e_1, e_2, \cdots, e_n$ und $f_1, f_2, \cdots, f_m$.

Aufgabe 5. Sei V ein reeller Vektorraum der Dimension 2. Eine lineare Abbildung $X : V \to V$ definiert ein Vektorfeld auf V. Für $p \in V$ sei $\gamma_P : \mathbb{R} \to V$ die Lösungskurve der Differentialgleichung zu dem Vektorfeld X mit $\gamma_p(0) = p$ als Anfangsbedingung. Zeige, dass die folgende Aussagen äquivalent sind:

(i) für ein $p \in V$ und eine Gerade A in V mit $0 \notin A$ ist die Menge $\{t \in \mathbb{R} \mid \gamma_p(t) \in A\}$ unendlich.

(ii) für jedes $p \in V, p \neq 0$, sind p und $A(p)$ linear unabhängig.

Aufgabe 6. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Sei $K := \{p \in \mathbb{R}^2 \mid x(p)^2 + y(p)^2 = 1\}$. Zeige: $K \neq \{q \in \mathbb{R}^2 \mid (Df)_q = 0\}$.

Aufgabe 7. Sei $\gamma : \mathbb{R} \to \mathrm{Mat}(n, n, \mathbb{R})$ differenzierbar derart, dass die reelle $(n \times n)$-Matrix $\gamma(t), t \in \mathbb{R}$, invertierbar ist und dass gilt:

$$\mathrm{Spur}(\gamma(t)^{-1} \frac{d}{dt}\gamma(t)) = 0$$

Zeige, dass die Zuordnung $t \in \mathbb{R} \mapsto \mathrm{Det}(\gamma(t)) \in \mathbb{R}$ konstant ist.

Aufgabe 8. Für $n \in \mathbb{N}$ sei X_n auf $\mathbb{R}$ das Vektorfeld $X_n = x^n \frac{\partial}{\partial x}$. Zeige: $[X_n, X_m]_{\mathrm{Lie}} = (m - n)X_{m+n-1}$.