Prof. N. A'Campo Wintersemester 2006/07

Übungen zur Vorlesung Analysis

2. Aufgabenblatt

Aufgabe 1. Sei V ein reeller Vektorraum der Dimension 2. Seien N, M Geraden in V, die 0 nicht enthalten. Seien $L_N, L_M : V \to \mathbb{R}$ die Linearformen mit $N = L_N^{-1}(1)$ und $M = L_M^{-1}(1)$. Konstruiere mit Zirkel und Regal die Gerade $(L_N + L_M)^{-1}(1)$.

Aufgabe 2. Berechne das Differential der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, p \in \mathbb{R}^2 \mapsto x(p)y(p)(x(p)^2 + y(p)^2 - 1) \in \mathbb{R}$. Ist f eine Morsefunktion? Zeichne die Niveaulinien von f.

Aufgabe 3. Sei V ein reeller Vektorraum der Dimension 2. Seien A, B, C, D Untervektorräume der Dimension 1 in V, die paarweise verschieden sind. Wähle $a \in A, c \in C, a \neq 0, b \neq 0$ und Linearformen $\beta, \delta : V \to \mathbb{R}$ mit $B = \beta^{-1}(0), D = \delta^{-1}(0)$. Zeige, dass die Zahl $\frac{\beta(a)\delta(c)}{\beta(c)\delta(a)}$ nur von A, B, C, D abhängt.

Aufgabe 4. Seien V, W reelle Vektorräume endlicher Dimension. Sei $A : V \to W$ linear. Wir definieren $A^* : W^* \to V^*$ wie folgt: $L \in W^* \mapsto L \circ A \in V^*$. Sei $e_1, e_2, \cdots, e_n$ eine Basis für V und sei $f_1, f_2, \cdots, f_m$ eine Basis für W. Wir notieren mit $x_1, x_2, \cdots, x_n$ und $y_1, y_2, \cdots, y_m$ die entspechenden Koordinatenfunktionen. Schreibe $A^*(y_1)$ als Linearkombination der $x_1, x_2, \cdots, x_n$. Hinweis: betrachte die Matrix von A bezüglich den Basen $e_1, e_2, \cdots, e_n$ und $f_1, f_2, \cdots, f_m$.

Aufgabe 5. Sei V ein reeller Vektorraum der Dimension 2. Eine lineare Abbildung $X : V \to V$ definiert ein Vektorfeld auf V. Für $p \in V$ sei $\gamma_P : \mathbb{R} \to V$ die Lösungskurve der Differentialgleichung zu dem Vektorfeld X mit $\gamma_p(0) = p$ als Anfangsbedingung. Zeige, dass die folgende Aussagen äquivalent sind:

(i) für ein $p \in V$ und eine Gerade A in V mit $0 \notin A$ ist die Menge $\{t \in \mathbb{R} \mid \gamma_p(t) \in A\}$ unendlich.

(ii) für jedes $p \in V, p \neq 0$, sind p und $A(p)$ linear unabhängig.

Aufgabe 6. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Sei $K := \{p \in \mathbb{R}^2 \mid x(p)^2 + y(p)^2 = 1\}$. Zeige: $K \neq \{q \in \mathbb{R}^2 \mid (Df)_q = 0\}$.

Aufgabe 7. Sei $\gamma : \mathbb{R} \to \mathrm{Mat}(n, n, \mathbb{R})$ differenzierbar derart, dass die reelle $(n \times n)$-Matrix $\gamma(t), t \in \mathbb{R}$, invertierbar ist und dass gilt:

$$\mathrm{Spur}(\gamma(t)^{-1} \frac{d}{dt}\gamma(t)) = 0$$

Zeige, dass die Zuordnung $t \in \mathbb{R} \mapsto \mathrm{Det}(\gamma(t)) \in \mathbb{R}$ konstant ist.

Aufgabe 8. Für $n \in \mathbb{N}$ sei X_n auf $\mathbb{R}$ das Vektorfeld $X_n = x^n \frac{\partial}{\partial x}$. Zeige: $[X_n, X_m]_{\mathrm{Lie}} = (m - n)X_{m+n-1}$.

Übungen zur Vorlesung Analysis

3. Aufgabenblatt

Aufgabe 1. Seien $X, Y : V \to V$ differenzierbare Vektorfelder auf einem reellen Vektorraum V von endlicher Dimension. Sei $p \in V$. Zeige:

$$([X,Y]_{\text{Lie}})_p = (DY)_p(X_p) - (DX)_p(Y_p)$$

Aufgabe 2. Sei $V = \mathbb{R}^2$ ausgestattet mit den Koordinatenfunktionen $x, y : V \to \mathbb{R}$. Berechne die Liesche Klammer der Vektorfelder $X_{a,b,c,d} = x^a y^b \frac{\partial}{\partial x} + x^c y^d \frac{\partial}{\partial y}$ wobei $a, b, c, d \in \mathbb{N}$ ist.

Aufgabe 3. Sei V ein reeller endlichdimensionaler Vektorraum und sei $X : U \to V$ ein Vektorfeld auf einer offenen Teilmenge U in V. Die Differentialgleichung zu dem Vektorfeld X mit Anfangsbedingung $p \in U$ ist eine Gleichung für parametrisierten Kurven $\gamma : [0,T] \to U$ mit $T > 0$ derart, dass für alle $t \in [0,T]$ gilt:

$$X_{\gamma(t)} = \dot{\gamma}(t) := \frac{d}{dt}\gamma(t),\ \gamma(0) = p$$

Eine Integralkurve von X ist eine differenzierbare Kurve $\gamma :]a,b] \to U$ mit $a < b$ derart, dass für alle $t \in]a,b[$ gilt: $X_{\gamma(t)} = \dot{\gamma}(t) := \frac{d}{dt}\gamma(t)$. Eine Integralkurve $\gamma :]a,b[\to U$ heisst maximal, wenn γ sich nicht auf einem Intervall $]a',b'[$ mit $]a,b[\subset]a',b'[$ mit $a' < a$ oder $b < b'$ als Integralkurve fortsetzen lässt. Hier ein Beispiel: Sei $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ das Vektorfeld $X_p = 1 + x(p)^2$. Eine Kurve $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ ist eine Integralkurve für X, wenn f differenzierbar ist und $f'(t) = 1 + f(t)^2, t \in]a,b[$ gilt. Zeige, dass für alle $p \in \mathbb{R}$ ein $T > 0$ und eine Integralkurve $\gamma : [0,T] \to \mathbb{R}$ für X mit $\gamma(0) = p$ existiert.

Aufgabe 4. Sei $X : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ das Vektorfeld $\frac{\partial}{\partial x} + \sqrt{|y|}\frac{\partial}{\partial y}$. Konstruiere alle Integralkurven $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ mit $\gamma(0) = 0$.

Aufgabe 5. Sei $X : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ein lineares Vektorfeld. Wir sagen, dass X vom Typus $i = 0, 1, \infty$ ist, wenn die Anzahl Untervektorräume L in $\mathbb{R}^2$ mit $\text{Dim}(L) = 1$ und mit $X(L) \subset L$ genau i ist. Zeichne die Integralkurven für lineare Vektorfelder X auf $\mathbb{R}^2$. Eine solche Zeichnung heisst Phasenportrait. Kann man den Typus ablesen?

Aufgabe 6. Sei $X : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ein lineares Vektorfeld und sei $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ eine nicht konstante periodische Integralkurve für X. Zeige, dass alle Integralkurven für X periodisch sind.

Aufgabe 7. Zeige, dass die Kurve $t \in \mathbb{R} \mapsto (t^2, t^3 - t) \in \mathbb{R}^2$ nicht Integralkurve für ein Vektorfeld auf $\mathbb{R}^2$ sein kann.

Aufgabe 8. Konstruiere eine injektive, beschränkte differenzierbare Kurve $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ mit $\frac{d}{dt}\gamma(t) \neq 0, t \in \mathbb{R}$, die nicht Integralkurve für ein stetiges Vektorfeld auf $\mathbb{R}^2$ sein kann.