Prof. N. A'Campo Wintersemester 2006/07

Übungen zur Vorlesung Analysis

3. Aufgabenblatt

Aufgabe 1. Seien $X, Y : V \to V$ differenzierbare Vektorfelder auf einem reellen Vektorraum V von endlicher Dimension. Sei $p \in V$. Zeige:

$$([X,Y]_{\text{Lie}})_p = (DY)_p(X_p) - (DX)_p(Y_p)$$

Aufgabe 2. Sei $V = \mathbb{R}^2$ ausgestattet mit den Koordinatenfunktionen $x, y : V \to \mathbb{R}$. Berechne die Liesche Klammer der Vektorfelder $X_{a,b,c,d} = x^a y^b \frac{\partial}{\partial x} + x^c y^d \frac{\partial}{\partial y}$ wobei $a, b, c, d \in \mathbb{N}$ ist.

Aufgabe 3. Sei V ein reeller endlichdimensionaler Vektorraum und sei $X : U \to V$ ein Vektorfeld auf einer offenen Teilmenge U in V. Die Differentialgleichung zu dem Vektorfeld X mit Anfangsbedingung $p \in U$ ist eine Gleichung für parametrisierten Kurven $\gamma : [0,T] \to U$ mit $T > 0$ derart, dass für alle $t \in [0,T]$ gilt:

$$X_{\gamma(t)} = \dot{\gamma}(t) := \frac{d}{dt}\gamma(t),\ \gamma(0) = p$$

Eine Integralkurve von X ist eine differenzierbare Kurve $\gamma :]a,b] \to U$ mit $a < b$ derart, dass für alle $t \in]a,b[$ gilt: $X_{\gamma(t)} = \dot{\gamma}(t) := \frac{d}{dt}\gamma(t)$. Eine Integralkurve $\gamma :]a,b[\to U$ heisst maximal, wenn γ sich nicht auf einem Intervall $]a',b'[$ mit $]a,b[\subset]a',b'[$ mit $a' < a$ oder $b < b'$ als Integralkurve fortsetzen lässt. Hier ein Beispiel: Sei $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ das Vektorfeld $X_p = 1 + x(p)^2$. Eine Kurve $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ ist eine Integralkurve für X, wenn f differenzierbar ist und $f'(t) = 1 + f(t)^2, t \in]a,b[$ gilt. Zeige, dass für alle $p \in \mathbb{R}$ ein $T > 0$ und eine Integralkurve $\gamma : [0,T] \to \mathbb{R}$ für X mit $\gamma(0) = p$ existiert.

Aufgabe 4. Sei $X : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ das Vektorfeld $\frac{\partial}{\partial x} + \sqrt{|y|}\frac{\partial}{\partial y}$. Konstruiere alle Integralkurven $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ mit $\gamma(0) = 0$.

Aufgabe 5. Sei $X : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ein lineares Vektorfeld. Wir sagen, dass X vom Typus $i = 0, 1, \infty$ ist, wenn die Anzahl Untervektorräume L in $\mathbb{R}^2$ mit $\text{Dim}(L) = 1$ und mit $X(L) \subset L$ genau i ist. Zeichne die Integralkurven für lineare Vektorfelder X auf $\mathbb{R}^2$. Eine solche Zeichnung heisst Phasenportrait. Kann man den Typus ablesen?

Aufgabe 6. Sei $X : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ein lineares Vektorfeld und sei $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ eine nicht konstante periodische Integralkurve für X. Zeige, dass alle Integralkurven für X periodisch sind.

Aufgabe 7. Zeige, dass die Kurve $t \in \mathbb{R} \mapsto (t^2, t^3 - t) \in \mathbb{R}^2$ nicht Integralkurve für ein Vektorfeld auf $\mathbb{R}^2$ sein kann.

Aufgabe 8. Konstruiere eine injektive, beschränkte differenzierbare Kurve $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ mit $\frac{d}{dt}\gamma(t) \neq 0, t \in \mathbb{R}$, die nicht Integralkurve für ein stetiges Vektorfeld auf $\mathbb{R}^2$ sein kann.