Prof. N. A'Campo Wintersemester 2006/2007

Übungen zur Vorlesung Analysis

6. Aufgabenblatt

Aufgabe 1. Sei V ein reeller Vektorraum endlicher Dimension und sei ω eine differenzierbare 1-Differentialform auf V. Für $p \in V, u, v \in V, s \in \mathbb{R}$, sei $P_s(p,u,v)$ der orientierte Rand des Parallelograms mit den Ecken $p, p+su, p+su+sv, p+sv$. Zeige, dass der Grenzwert

$$\lim_{s \to 0} \frac{1}{s^2} \int_{P_s(p,u,v)} \omega$$

existiert. Hinweis: betrachte die Dreigliedentwickelung an der Stelle p von $\omega : V \to V^*$.

Aufgabe 2. (Fortsetzung). Sei $||?||_V$ eine Norm auf V. Wir nehmen an, dass die Form ω stetig differenzierbar ist und dass $d\omega = 0$ gilt. Sei K eine abgeschlossene und beschränkte Teilmenge in V. Zeige, dass für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert derart, dass für alle $p \in K$, alle $u, v \in V$ mit $||u||_V, ||v||_V \leq \delta$ gilt:

$$|\int_{P_1(p,u,v)} \omega| \leq \epsilon\delta^2$$

Aufgabe 3. (Fortsetzung). Zeige, dass für ω eine Stammfunktion $f : V \to \mathbb{R}$ existiert.

Aufgabe 5. Sei α eine 1-Differentialform auf $\mathbb{R}^3$, die keine Nullstellen hat. Wir nehmen an, dass $\alpha \wedge d\alpha = 0$ gilt. Zeige: $(d\alpha)_p(u,v) = 0$ für alle $p \in \mathbb{R}^3, u, v \in \mathbb{R}^3$ mit $\alpha_p(u) = \alpha_p(v) = 0$.

Aufgabe 6. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Wir nehmen an, dass die Ableitung f' folgende Eigenschaft hat. Für alle $t \in \mathbb{R}$ existieren die Grenzwerte $\lim_{s \to t, s<t} f'(s)$ und $\lim_{s \to t, s>t} f'(s)$. Zeige, dass die Funktion f' stetig ist.