Prof. N. A'Campo Wintersemester 2006/07

Übungen zur Vorlesung Analysis

7. Aufgabenblatt, STAMM-Formen

Aufgabe 1. Sei V ein reeller Vektorraum endlicherer Dimension. Sei $U \subset V$ eine bezüglich 0 sternförmige offene Teilmenge in V. Sternförmig bezüglich $q \in V$ heisst, dass für alle $p \in V$ der Weg $t \in [0,1] \mapsto q+t(p-q)$ in U ist. Für eine stetige k-Differentialform ω auf U sei $S\omega$, die wie folgt definierte $(k-1)$-Differentialform.

$$(S\omega)_p(u_1, u_2, \cdots, u_{k-1}) = \int_0^1 t^{k-1}\omega_{tp}(p, u_1, u_2, \cdots, u_{k-1})dt$$

Beispiel. Sei ω eine stetig differenzierbare 1-Differentialform auf U mit $d\omega = 0$. Zeige, dass $f := S\omega$ eine Funktion mit $df = \omega$ ist.

Aufgabe 2. Sei ω eine stetig differenzierbare 1-Differentialform auf U. Setze $f = S\omega$. Zeige $df - \omega = Sd\omega$.

Aufgabe 3. Beispiel. Sei ω die 2-Form $adx \wedge dy$ auf $\mathbb{R}^2$, wobei a auf $\mathbb{R}^2$ eine stetige Funktion ist . Sei b die Funktion $b(p) = \int_0^1 ta(tp)dt$. Zeige: $S\omega = b(xdy - ydx)$.

Aufgabe 4. (Fortsetzung). Wir nehmen an, dass a stetig differenzierbar ist. Zeige, dass b stetig differenzierbar ist.

Aufgabe 5. (Fortsetzung). Zeige: $d(b(xdy - ydx)) = adx \wedge dy$.

Aufgabe 6. Sei ω auf $\mathbb{R}^n$ die Form $e^{-x_1^2-x_2^2-\cdots-x_n^2}dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n$. Berechne eine $(n-1)$-Form α mit $d\alpha = \omega$.

Satz von Poincaré. *Sei V ein reeller Vektorraum endlicherer Dimension. Sei $U \subset V$ eine bezüglich 0 sternförmige offene Teilmenge in V. Sei ω auf U eine stetig differenzierbare k-Differentialform, $k > 0$. Dann gilt: $dS\omega + Sd\omega = \omega$. Insbisondere, ist ω geschlossen, dann existiert eine $(k-1)$-Form α mit $d\alpha = \omega$.*