Prof. N. A'Campo Wintersemester 2006/07

Übungen zur Vorlesung Analysis

8. Aufgabenblatt

Aufgabe 1. Sei X ein topologischer Raum und sei $a := (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X. Ein $p \in X$ heisst Häufungspunkt der Folge a, wenn für jede offene Teilmenge $U \subset X$ mit $p \in U$ die Menge $\{i \in \mathbb{N} \mid a_i \in U\}$ nicht beschränkt ist. Zeige, dass in einem kompakten Raum X jede Folge Häufungspunkte hat.

Aufgabe 2. Sei X ein topologischer Raum und sei $p \in X$ Häufungspunkt einer Folge $a := (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X. Wir nehmen an, dass ein abzählbares System $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von offenen Teilmengen mit $p \in U_k, k \in \mathbb{N}$, in X existiert derart, dass für jede offene Teilmenge U in X mit $p \in U$ ein $k \in \mathbb{N}$ mit $U_k \subset U$ existiert. Zeige, dass die Folge a eine Teilfolge mit Grenzwert p hat.

Aufgabe 3. Sei X ein kompakter metrischer Raum und $a := (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X. Zeige, dass die Folge a eine konvergente Teilfolge hat.

Aufgabe 4. Sei X ein metrischer Raum derart, dass jede Folge in X eine in X konvergente Teilfolge hat. Zeige, dass der Raum X kompakt ist.

Aufgabe 5. Sei $K_1 \subset C^1([0,1],\mathbb{R})$ die Einheitskugel der Norm $||f||_{C^1} := \mathrm{Max}_{t\in[0,1]}\{|f(t)|, |f'(t)|\}$. Sei K_0 der Abschluss von K_1 in $C^0([0,1],\mathbb{R})$. Zeige, dass K_0, ausgestattet mit der von $C^0([0,1],\mathbb{R})$ induzierte Topologie, kompakt ist.

Aufgabe 6. (Fortsetzung.) Zeige, dass jede Funktion $f : [0,1] \to [-1,1]$, die Lipschitz mit konstante 1 ist, Element der Menge K_0 ist. Hinweis: Konstruiere Approximationen durch Faltung.

Aufgabe 7. Sei V ein normierter $\mathbb{R}$-Vektorraum endlicher Dimension. Wir normieren V^* mit der Operatornorm bezuglich der gegebenen Norm $||?||_V$ auf V. Sei B_V die Einheitskugel in V. Sei $K_1 \subset C^1([0,1],\mathbb{R})$ die Einheitskugel der Norm $||f||_{C^1} := \mathrm{Max}_{p\in B_V}\{|f(p)|, ||(Df)_p||_{V^*}\}$. Sei K_0 der Abschluss von K_1 in $C^0(B_V,\mathbb{R})$. Zeige, dass K_0, ausgestattet mit der von $C^0([0,1],\mathbb{R})$ induzierte Topologie, kompakt ist. Zeige, dass jede Funktion $f : B_V \to [-1,1]$, die Lipschitz mit konstante 1 ist, Element der Menge K_0 ist.

Aufgabe 8. Sei (X,T) ein kompakter topologischer Raum. Seien T', T'' Topologieen auf X, wobei T' strickt gröber, T'' strickt feiner als T sind. Zeige, dass die Menge X ausgestattet mit der Topologie T' oder T'' nicht kompakt ist.

Aufgabe 9. Sei α und β differenzierbare 1-Differentialformen auf $\mathbb{R}^3$. Wir nehmen an, dass die Formen α und β keine Nullstellen haben und proportional sind, d.h $\alpha_p \neq 0, \beta_p \neq 0, p \in \mathbb{R}^3$ und es existiert eine Funktion f mit $beta = f\alpha$. Wir nehmen an, dass α die Bedingung von Frobenius erfüllt, d.h. $\alpha \wedge d\alpha = 0$. Zeige, dass die Form β die Bedingung von Frobenius erfüllt.

Aufgabe 10. Sei $X := \{p \in \mathbb{R}^n \mid ||p||_{Eukl.} := x_1(p)^2 + x_2(p)^2 + \cdots + x_n(p)^2 \leq$

$1\}$. Eine Funktion f auf X heisst differenzierbar, wenn für alle $p \in X$ die Funktion f eine Dreigliedentwicklung hat. Sei I die Inversion $\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, p \mapsto \frac{p}{||p||_{Eukl.}}$. Zeige, dass die Funktion $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, die auf X mit f übereinstimmt und mit $F(p) := f(I(p))$ für $||p||_{Eukl.} > 1$ definiert ist, eine differenzierbare Funktion ist.

Aufgabe 11. Sei $C^1(X, \mathbb{R})$ der Raum aller stetig differenzierbaren Funktionen auf X. Wir normieren $C^1(X, \mathbb{R})$ mit der Norm $||f||_{\mathbb{C}^1} := \text{Max}(A, B)$, wobei $A = ||f||_{\mathbb{C}^0}$ und $B = ||df||_{\mathbb{C}^0}$ sind. Hier ist die C^0-Norm für eine Abbildung $g : X \to V$, wobei V ein mit $||?||_V$ normierter, endlich dimensionaler $\mathbb{R}$=Vektorraum ist, als $||g||_{\mathbb{C}^0} := \text{Supremum}_{p \in X} ||g(p)||_V$ definiert. Zeige, dass der Raum $C^1(X, \mathbb{R})$ ein Banachraum ist.

Aufgabe 12. Sei $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine C^∞-Funktion mit den Eigenschaften:

– $\phi(p) \geq 0$,

– $\phi(p) = 0$ für $||p||_{\text{Eukl.}} > 1$,

– $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(p) dx_1(p) dx_2(p) \cdots dx_n(p) = 1$.

Für $k \in \mathbb{N}, k > 0$, sei ϕ_k die Funktion mit $\phi_k(p) := \frac{1}{k^n}\phi(kp)$. Für $f \in C^0(X, \mathbb{R})$, sei $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ die Erweiterung von f mit $F(p) = f(\frac{p}{||p||^2_{\text{Eukl.}}})$ für $||p||_{\text{Eukl.}} > 1$. Für $k \in \mathbb{N}, k > 0$, sei f_k die Einschränkung von $F * \phi_k$ auf X. Zeige, dass die Folge $(f_k)_{k \in \mathbb{N}_{>0}}$ eine Cauchyfolge in $C^0(X, \mathbb{R})$ ist. Zeige, dass die Aussagen (i) $f \in C^1(X, \mathbb{R})$ und (ii) die Folge $(f_k)_{k \in \mathbb{N}_{>0}}$ ist eine Cauchyfolge in $C^1(X, \mathbb{R})$, äquivalent sind.

Aufgabe 13. Studiere mit grösster Sorgfallt die Arbeit von Mikael Passare : **How to compute $\sum \frac{1}{n^2}$ by solving triangles**.
Siehe `http://arxiv.org/abs/math.GM/0701039`.