Prof. N. A'Campo Wintersemester 2006/07

Übungen zur Vorlesung Analysis

9. Aufgabenblatt

Aufgabe 1. Sei $V := C^0_{1-\text{periodisch}}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ der Raum aller stetigen Funktionen auf $\mathbb{R}$, die 1-periodisch sind. Definiere auf V eine Norm $||?||_V$ mit der V ein Banachraum ist.

Aufgabe 2. Sei $X : V \to V$ auf V das Vektorfeld $f \in V \mapsto X_f \in V$, wobei für $t \in \mathbb{R}$ gilt: $X_f(t) = f(t) - 2\int_{\frac{-1}{4}}^{\frac{1}{4}} f(t+s)ds$. Zeige, dass X Lipschitz ist.

Aufgabe 3. Zeige, dass für jedes $f \in V$ eindeutig eine differenzierbare Kurve $\gamma_f : [0, \infty[\to V$ mit $\gamma_f(0) = f$ und $\dot{\gamma_f}(u) = X_{\gamma_f(u)}, u \in \mathbb{R}, u > 0$ existiert.

Aufgabe 4. Zeige, dass die Funktionen $\gamma_f(u), u \in \mathbb{R}, u \geq 0$ in V eine beschränkte Teilmenge bilden.

Aufgabe 5. Zeige, dass die Funktionen $\gamma_f(u), u \in \mathbb{R}, u \geq 0$ gleichgradig stetig sind.

Aufgabe 6. Sei $m_f \in V$ die konstante Funktion $m_f(t) = \int_0^1 f(s)ds$. Zeige, dass die Teilmenge Bild$(\gamma_f) \cup \{m_f\}$ kompakt ist.

Aufgabe 7. Finde Zahlen $\lambda \in \mathbb{R}$ und Funktionen $f \in V, f \neq 0$, mit $X_f = \lambda f$.

Aufgabe 8. Für $f \in V$ zeige die Existenz von einer Lösungskurve $\Gamma_f : \mathbb{R} \to V$ mit $\Gamma_f(0) = f$ der Differentialgleichung zu X.

Aufgabe 9. Für welche Funktionen $f \in V$ ist die Kurve Γ_f beschränkt in V?