Prof. N. A'Campo Herbstsemester 2008

Übungen zur Vorlesung Analysis

2. Aufgabenblatt

Aufgabe 1. Die Fourierreihe der 1-periodischen Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(t) = 1/8 - \frac{|1/2-t|}{2}, 0 \leq t \leq 1$, ist

$$FR(f) = \frac{1}{2\pi^2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(2k+1)^2} e^{2\pi i(2k+1)}$$

Es folgt das Resultat:

$$\frac{\pi^2}{8} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots$$

In seiner Rede am Dies 2007 hat Rektor Antonio Loprieno das berühmte Resultat von Leonard Euler zitiert:

$$\frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots$$

Zeige, dass aus ein dieser Resultate das andere Resultat folgt.

Aufgabe 2. Sei $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $G(t) = 0$ für $t \in \mathbb{R}, |t| > A, A \in \mathbb{R}$. Setze $H(t) = \sum_{j=-\infty}^{j=+\infty} G(t+j)$. Dann ist die Funktion H 1-periodisch. Zeige:

$$FR_k(H) = \int_{-A}^{+A} G(t) e^{-2\pi i t} dt$$

und

$$FR_k(G * f) = FR_k(H) FR_k(f)$$

für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stetig und 1-periodisch.

Aufgabe 3. Sei G die Funktion der Aufgabe 3, Blatt 1. Zeige, dass die Falltungsgleichung $G * f = F$, wobei die Funktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 1-periodisch und 4-mal stetig differenzierbar gegeben ist und die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stetig und 1-periodisch gesucht ist, eine eindeutige Lösung nach f hat.

Aufgabe 4. (Fortsetzung) Löse die Gleichung $G * f(t) = \sin(2\pi t) + \cos(4\pi t) + 1$.

Aufgabe 5. (Fortsetzung) Definiere $G_n, n = 1, 2, \cdots$ mit $G_1 := G$ und $G_{n+1} := G * G_n$. Berechne $\lim_{n\to\infty} G_n * f$ wobei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stetig und 1-periodisch ist.