Prof. N. A'Campo Herbstsemester 2008

Übungen zur Vorlesung Analysis

4. Aufgabenblatt

Aufgabe 1. Ist die Funktion $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \phi(t) = \text{Maximum}(0, 1 - (t+1)^2)$ differenziebar? Ist die Funktion $\phi * \phi$ differenzierbar?

Aufgabe 2. (Fortsetzung) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ integrierbar. Wir nehmen an, dass $\phi * f = \frac{4}{3} f$ gilt. Zeige, dass die Funktion f beliebig oft differenzierbar ist.

Aufgabe 3. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die Funktion $f = xy(x+y-1)(y-x-2)$. Bestimme alle $p \in \mathbb{R}^2$ mit $(Df)_p = 0$. Welche $p \in \mathbb{R}^2$ mit $(Df)_p = 0$ sind Maxima, Minima oder Sattelpunkte von f. Hinweis: Untersuche die Hessische Form $(Hf)_p$.

Aufgabe 4. Sei $J : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ linear mit $J(e_1) = e_2$ und $J(e_2) = -e_1$. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ harmonisch. Konstruiere eine differenzierbare Funktion $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ derart, dass für das Differential der Funktion $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}, F(p) = f(p) + ig(p), p \in \mathbb{R}^2$ an jeder Stelle $p \in \mathbb{R}^2$ gilt:

$$(DF)_p \circ J = i(DF)_p$$

Zeige, dass die Funktion g harmonisch ist. Die Funktionen f und g heissen harmonisch konjugiert. Hinweis: $(Df)_p \circ J$ ist das Differential an der Stelle p der gesuchten Funktion g. Ist die 1-Differentialform $p \in \mathbb{R}^2 \mapsto (Df)_p \circ J$ geschlossen? Existiert eine Stammfunktion?

Aufgabe 5. (Fortsetzung). Bestimme auf $\mathbb{R}^2$ eine Funktion g die harmonisch zu $f := x^2 - y^2$ konjugiert ist.