Prof. N. A'Campo Herbstsemester 2008

Übungen zur Vorlesung Analysis

5. Aufgabenblatt

Aufgabe 1. Sei V ein endlich dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Basis $e_1, e_2, \cdots, e_n$ und Koordinatenfunktionen $x_1, x_2, \cdots, x_n$. Sei $\omega := dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n$. Die Form ω ist eine n-Differentialform auf V mit $n = \mathrm{Dim}(V)$ und $\omega_p \neq 0, p \in V$. Sei $X : V \to V$ ein differenzierbares Vektorfeld auf V. Wir definieren die Funktion $\mathrm{div}_\omega(X)$ durch die Gleichung:

$$\mathrm{div}_\omega(X)\,\omega = d(i_X\omega)$$

Die Funktion $\mathrm{div}_\omega(X)$ heisst die Divergenz des Vektorfeldes X bezüglich der Volumenform ω.

Zeige für $X = a_1e_1 + a_2e_2 + \cdots + a_ne_n$:

$$\mathrm{div}_\omega(X) = \frac{\partial a_1}{\partial x_1} + \frac{\partial a_2}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial a_n}{\partial x_n}$$

Aufgabe 2. (Fortsetzung) Sei $f : V \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Zeige:

$$\mathrm{div}_\omega(fX) = f\mathrm{div}_\omega(X) + i_X(df)$$

Aufgabe 3. Sei $f : V \to \mathbb{R}$ strict positiv und differenzierbar. Zeige:

$$\mathrm{div}_{f\omega}(X) = \mathrm{div}_{f\omega}(X) + i_X(d(log(f)))$$

Hinweis:$\mathrm{div}_{f\omega}(X)$ ist jetzt durch die Gleichung

$$\mathrm{div}_{f\omega}(X)\, f\omega = d(i_X(f\omega))$$

definiert. Es gelten $i_X(f\omega) = fi_X\omega$ und $d(i_X(f\omega)) = fd(i_X\omega) + df \wedge i_X\omega$. Bemerke $df \wedge i_X\omega = i_X(df)\omega$.

Aufgabe 4. Sei V, ω wie in Aufgabe 1. Sei $X : V \to V$ das Vektorfeld $p \in V \mapsto p \in V$. Berechne: $\mathrm{div}_\omega(X)$. Sei $X : V \to V$ ein lineares Vektorfeld. Zeige:

$$\mathrm{div}_\omega(X) = \mathrm{Spur}(X)$$

Aufgabe 5. Wir arbeiten in $V = \mathbb{R}^n$ mit Standardbasis $e_1, e_2, \cdots, e_n$, Standardkoordinatenfunktionen $x_1, x_2, \cdots, x_n$, Standardskalarprodukt $(\ ,\ )_V$ und Standardvolumenform $\omega = dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n$. Sei $f : V \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar. Das Vektorfeld $\mathrm{Grad}(f)$ ist durch

$$((\mathrm{Grad}_{(\ ,\ )_\mathrm{V}}(f))_p, h)_V = (df)_p(h), p \in V, h \in V$$

definiert und heisst Gradient von f bezüglich dem Skalarprodukt $(\, , \,)_V$. Wir schreiben manchmal div statt div_ω wie auch Grad statt $\mathrm{Grad}_{(\, , \,)_V}$. Zeige:

$$\mathrm{div}(\mathrm{Grad}(f)) = \Delta(f)$$

Aufgabe 6. Sei $X : V \to V$ nun stetig differenzierbar und Lipschitz auf V. Dann existiert eine differenzierbare Abbildung $\Phi : V \times \mathbb{R} \to V, (p,t) \mapsto \Phi_t(p) \in V$ mit $\Phi_0(p) = p, p \in V$ und $\frac{d}{dt}\Phi_t(p) = X_{\Phi_t(p)}$. Es gilt: $\Phi_t \circ \Phi_s = \Phi_{t+s}, t, s \in \mathbb{R}$. Sei $\omega_t := \Phi_t^* \omega$. Zeige:

$$\frac{d}{dt}\omega_t = d(i_X \omega) = \mathrm{div}_\omega(X)\omega$$

Hinweis: Dreigliedentwicklungen. Die Ableitung $\frac{d}{dt}\omega_t$ heisst Liesche Ableitung von ω in Richtung X und wird mit $L_X\omega$ notiert.

Aufgabe 7. (Fortsetzung und Verallgemeinerung). Sei α eine differenzierbare k-Differentialform auf V. Zeige die Formel von Cartan:

$$L_X\alpha = i_X(d\alpha) + d(i_X\alpha)$$