Übungen zur Vorlesung Analysis

6. Aufgabenblatt

Aufgabe 1. Sei $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ die parametrisierte Kurve $\gamma(t) = (1+e^t)e^{it}$. Ist das Bild B von γ eine Untermannigfaltigkeit im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{C}$? Ist der Abschluss von B in $\mathbb{C}$ eine Untermannigfaltigkeit in $\mathbb{C}$?

Aufgabe 2. Sei $X : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ein lineares Vektorfeld. Seien $a, b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ Lösungskurven der Differentialgleichung zu X. Seien A, B Bild von a, b. Ist $A \cup B$ eine Untermannigfaltigkeit in $\mathbb{R}^2$?

Aufgabe 3. Sei $X : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ein stetiges Vektorfeld und sei $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ eine Lösungskurve der Differentialgleichung zu X. Wir nehmen an, dass das für $|t| > 1$ gilt $\gamma(t) = te_1$. Ist γ injektiv? Ist das Bild von γ eine Untermannigfaltigkeit in $\mathbb{R}^2$?

Aufgabe 4. Eine 2-Differentialformen ω auf $\mathbb{R}^4$ mit $*\omega = \omega$ heisst $*$-dual. Bestimme die $*$-dualen 2-Differentialformen auf $\mathbb{R}^4$.

Aufgabe 5. Sei die 1-Differentialform $\omega = adx + bdy$ auf $\mathbb{R}^2$ $*$-dual oder $*$-antidual (d.h. $*\omega = -\omega$). Zeige: $\omega = 0$.

Aufgabe 6. Sei die 1-Differentialform $\omega = adx + bdy$ auf $\mathbb{R}^2$ geschlossen (d.h. $d\omega = 0$) und $*$-geschlossen (d.h. $d(*\omega) = 0$). Wir nehmen an, dass die Funktionen a und b zweimal differenzierbar sind. Zeige: $\Delta a = \Delta b = 0$.

Aufgabe 7. Sei die 1-Differentialform $\omega = adx + bdy$ auf $\mathbb{R}^2$ geschlossen und $*$-geschlossen. Wir nehmen an, dass die Funktionen a und b stetig differenzierbar sind. Zeige: $\Delta a = \Delta b = 0$.