Prof. N. A'Campo Herbstsemester 2007

Übungen zur Vorlesung Riemansche Flaechen

2. Aufgabenblatt

Aufgabe 1. Für eine komplexe Zahl $t, t \neq 0$, sei S_t die Untergruppe in $\mathbb{C}^*$, die von t erzeugt wird. Für welche t ist $\mathbb{C}^*/S_t$ eine kompakte Riemannsche Fäche?

Aufgabe 2. Für $z \in \mathbb{C}, \mathrm{Im}(z) \neq 0$, sei I_z die komplexe Struktur auf den $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{C}$ mit $I_z(1) = z$. Schreibe die Matrix von I_z bezüglich der $\mathbb{R}$-Basis $(1, i)$ aus. Zum Beispiel, die komplexe Struktur des $\mathbb{C}$-Vektorraumes $\mathbb{C}$ ist I_i. Jede komplexe Struktur auf $\mathbb{C}$ ist eindeutig von Form I_z.

Aufgabe 3. Für jedes $p \in H$, wobei H die obere Halbebene ist, statten wir den Tangentialraum $T_p(H)$ mit der komplexen Struktur $J_p := I_{z(p)}$ aus. Sei $p \in H$. Konstruiere lokal um $0 \in \mathbb{C}$ eine Abbildung $\Phi : B \to H, B := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < \delta$, mit $\Phi(0) = p$, die $I_i - I_J$ holomorph ist. $I_i - I_J$ holomorph heisst, dass $(D\Phi)_q(ih) = J_{\Phi(q)}(D\Phi)_q(h)), q \in B, h \in \mathbb{C}$ gilt. Hinweis: hier ist ein Ansatz. $\Phi(x + iy) = x\phi(y) + i\phi(y)$, wobei $\phi : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion ist. Zeige, dass $I_i - I_J$ Holomorphie für Φ die Differentialgleichung $\phi' = \phi^2$ für ϕ entspricht. entspricht.

Aufgabe 4. (Fortsetzung). Zeige, dass für die C^∞-Mannigfaltigkeit H eindeutig einen maximalen holomorpen Atlas (U_α, ϕ_α) existiert, derart die Kartenfunktionen $\phi_\alpha : U_\alpha \subset H \to \phi_\alpha(U_\alpha) \subset \mathbb{C}$ $I_J - I_i$ holomorph sind. Also definiert das Paar (H, J) eindeutig eine Riemannsche Fläche, die wir mit H_J notieren.

Aufgabe 5. (Fortsetzung, für später). Ist H_J biholomorph zu C oder zu H?

Aufgabe 6. Sei μ ein Mass auf S_1. Die Fourierreihe von μ ist die Reihe

$$FR(\mu) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mu(\theta \in S_1 \mapsto e^{-2\pi k i \theta}) e^{2\pi k i \theta}$$

Zeige, dass die Gleichung $f'' = \mu f$, mit f stetig eine Lösung hat, wenn $\mu(\theta \in S_1 \mapsto 1) = 0$ gilt. Wie ist f'' zu verstehen?

Aufgabe 7. Seien X, Y, A, B vier 2-dimensionale Untervektorräume in einem 4-dimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraum V. Wir nehmen an, dass die Unterräume X, Y, A, B paarweise V aufspannen. Seien $\phi_A : X \to Y$ und $\psi_B : Y \to X$ die lineare Abbildungen mit Graph A und B. Sei $\delta(A, B, X, Y) = \psi_B \circ \phi_A : X \to X$. Welche Eigenschaft von $\delta(A, B, X, Y) \in \mathrm{GL}(X) = \mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$ ist äquivalent zu der Existenz einer komplexen Struktur $J \in \mathrm{GL}(V)$ derart, dass die Unterräume X, Y, A, B komplexe Geraden in V_J sind.

Aufgabe 8. (Fortsetzung) Beschreibe für ein Quadrupel X, Y, A, B den Raum aller komplexen Strukturen J auf V mit $J(X) = X, J(Y) = Y, J(A) = A, J(B) = B$.