Prof. N. A'Campo Herbstsemester 2007

Übungen zur Vorlesung Riemansche Flaechen

3. Aufgabenblatt

Aufgabe 1. Sei M eine orientierbare kompakte zusammenhängende Fläche. Eine Brille in M ist ein Paar (a, b) von Untermannigfaltigkeiten a, b derart, dass a und b diffeomorph zu S^1 sind und dass a und b sich in einem Punkt transversal schneiden. Zeige, dass das Geschlecht $g(M)$ von M die maximale Anzahl k von Brillen $(a_1, b_1), \cdots, (a_k, b_k)$ mit $(a_i \cup b_i) \cap (a_j \cup b_j) = \emptyset, 1 \leq i < j \leq k$, ist. Hinweis: konstruiere geschlossene 1-Differentialformen $\alpha_i, \beta_i, 1 \leq i \leq g(M)$ deren Wegintegrale über a_j, b_j alle verschwinden, ausgenommen dass die Wegintegrale von α_i über a_i und β_i über b_i alle ± 1 sind. Zeige, dass die Cohomologieklassen der Formen α_i, β_i in $H^1_{DR}(M, \mathbb{R})$ linear unabhängig sind.

Aufgabe 2. (Fortsetzung). Wähle auf M eine Orientierung und wähle in M ein maximales System $(a_1, b_1), \cdots, (a_g, b_g)$ von Brillen. Wir orientieren die Untermannigfaltigkeiten a_i, b_i derart, dass das Paar von orientierten Tangentialrichtungen im Schnittpunkt P_i von a_i und b_i mit der Orientierung von M an der Stelle P_i übereinstimmt. Wähle weiter die Formen α_i, β_i so, dass die Wegintegrale $\int_{a_i} \alpha_i, \int_{b_i} \beta_i$ gleich $+1$ sind. Definiere auf $H^1_{DR}(M, \mathbb{R})$ eine nichtentartete schiefsymetrische Bilinearform. Hinweis: Berechne $\int_M u \wedge v$ mit u, v aus $\{\alpha_i, \beta_j\}$.

Aufgabe 3. Sei M eine Riemannsche Fläche von Geschlecht 1. Sei (a, b) eine Brille in M. Sei ω eine holomorphe 1-Differentialform vom Typus $(1, 0)$ derart, dass $\int_a \omega = 1$. Sei Γ in C die abelsche Gruppe, die von 1 und $\int_b \omega$ aufgespannt wird. Zeige, dass Γ ein Gitter ist.

Aufgabe 4. (Fortsetzung). Definiere eine biholomorphe Abbildung $\pi : M \to \mathbb{C}/\Gamma$.

Aufgabe 5. Sei $F : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}$ eine homogene polynomiale Abbildung von Grad $d \in \mathbb{N}, d > 0$. Wir nehmen an, dass $F : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}$ und $dF : \mathbb{C}^3 \to (\mathbb{C}^3)^*$ auf $\mathbb{C}^3 \setminus \{0\}$ keine gemeinsame Nullstelle haben. Zeige, dass das Nullstellengebilde von F in $P^2(\mathbb{C})$ eine Riemannsche Fläche ist.