Prof. N. A'Campo Herbstsemester 2007

Übungen zur Vorlesung Riemannsche Flächen.

4. Aufgabenblatt.

Aufgabe 1. Sei $d : \Omega^0_{C^1} \to \Omega^1_{C^0}$ der de Rham Komplex der Mannigfaltigkeit S^1, wobei $\Omega^0_{C^1}$ der Banachraum aller stetig differenzierbaren Funktionen ist und wobei $\Omega^1_{C^0}$ der Banachraum aller stetigen 1-Differentialformen ist. Zeige, dass d ein Fredholmscher Operator ist. Sei $g \in \Omega^0_{C^1}$. Zeige, dass die Abbildung $f \in \Omega^0_{C^1} \mapsto fdg \in \Omega^1_{C^0}$ ein kompakter Operator $G_g$ist. Wähle $g = \mathrm{Re}(e^{2\pi i\theta})$. Berechne: $\mathrm{Dim}(d)$, $\mathrm{Dim}(d + G_g)$, $\mathrm{Dim}(d + G_{g^2})$. Kontrolliere: $\mathrm{Index}(d) = \mathrm{Index}(d + G_g) = \mathrm{Index}(d + G_{g^2})$.

Aufgabe 2. Sei (M, g) eine kompakte orientierte beliebig oft differenzierbare Riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension n. Seien $* : \Omega^k(M, \mathbb{R}) \to \Omega^{n-k}(M, \mathbb{R})$ den Hodge Operator. Dann ist $(u, v) \in \Omega^k(M, \mathbb{R}) \mapsto (u, v)_{L^2} := \int_M u \wedge *v \in \mathbb{R}$ ein Skalarprodukt auf $\Omega^k(M, \mathbb{R})$. Sei $\Omega^k_{L^2}(M, \mathbb{R})$ die Vervolständigung für die Norm $u \mapsto ||u||_{L^2} := \sqrt{\int_M u \wedge *u}$ der Raum aller beliebig oft differenzierbaren k-Differentialformen auf M. Zeige, dass der Raum $\Omega^k_{L^2}(M, \mathbb{R})$ nicht von der Metrik g abhängt.

Aufgabe 3. (Fortsetzung). Sei $X := X_1, X_2, \cdots, X_N$ ein System von beliebig oft differenzierbaren Vektorfelder auf M derart, dass für alle $p \in M$ die Vektoren $X_{1,p}, X_{2,p}, \cdots, X_{N,p}$ den Tangentialraum $T_p(M)$ aufspannen. Sei $s \in \mathbb{N}$. Sei $u \in \Omega^k(M, \mathbb{R})$. Sei Y eine Folge der Länge t mit $Y_i \in \{X_1, X_2, \cdots, X_N\}$. Wir definieren die partielle Ableitung $L_Y(u)$ als $L_{Y_1} \circ L_{Y_1} \circ L_{Y_t}(u)$ wobei L die Liesche Ableitung ist. Sei $(u, v)_{H^s}$ die Summe $\sum_{Y,|Y|\leq s}(L_Y(u) \wedge *L_Y(v))_{L^2}$. Dann ist $(u, v)_{H^s}$ ein Skalarprodukt. Sei $\Omega^k_{H^s}(M, \mathbb{R})$ die Vervolständigung für die Norm $u \mapsto ||u||_{H^s}$ der Raum aller beliebig oft differenzierbaren k-Differentialformen auf M. Zeige, dass der Raum $\Omega^k_{H^s}(M, \mathbb{R})$ nicht von der Metrik g noch vom System X abhängt.

Aufgabe 4. Sei (M, g) eine kompakte Mannigfaltigkeit mit Riemannscher Metrik g. Für alle $s \in \mathbb{N}$ ist der Operator $\Delta_M := *d*d : \Omega^0_{H^{s+2}}(M, \mathbb{R}) \to \Omega^0_{H^s}(M, \mathbb{R})$ ein Fredholm Operator.

Aufgabe 5. Sei S^2 die Einheitssphäre im Euklidischen 3-dimensionalen Raum. Bestimme die Eigenfunktionen des Δ_{S^2}.