Übungen zur Vorlesung Riemannsche Flächen.

7. Aufgabenblatt.

Aufgabe 1. Wir arbeiten auf $P^1(\mathbb{C}) := \{(x:y) \mid (x,y) \in \mathbb{C} \setminus \{0\}\} = \{\frac{x}{y} \in \mathbb{C} \cup \{\infty\} \mid (x,y) \in \mathbb{C} \setminus \{0\}\}$ mit den Karten $(U_0, z_0), (U_1, z_1)$, wobei $U_0 := \{(x:y)P^1(\mathbb{C}) \mid y \neq 0\}, z_0 := \frac{x}{y}$ und $U_1 := \{(x:y)(\mathbb{C}) \in P^| x \neq 0\}, z_1 := \frac{y}{x}$. Sei $P := (0:1)$. Sei D der divisor $kP, k \in \mathbb{Z}$. Sei L_D das Linienbundel zu D. Berechne die Dimension vom Raum der holomorphen Schnitten $\Gamma(P^1(\mathbb{C}), L_D)$ in abhängigkeit von $k \in \mathbb{Z}$. Hinweis: Betrachte den Einschränkungsoperator $E : \Gamma(P^1(\mathbb{C}), L_D) \to \Gamma(U_0, L_D)$. Zeige, dass E injektiv ist. Bestimme das Bild von E.

Aufgabe 2. (Fortsetzung). Sei $s \in \Gamma(P^1(\mathbb{C}), L_D), s \neq 0$. Also $k \geq 0$. Sei (s) der Divisor von s. Sei $L_{(s)}$ das Linienbundel zu (s). Zeige, dass die Linienbundel L_D und $L_{(s)}$ isomorph sind.

Aufgabe 3. (Fortsetzung). Sei $s \in \Gamma^{Meromorph}(P^1(\mathbb{C}), L_D), s \neq 0$. Sei (s) der Divisor von s. Sei $L_{(s)}$ das Linienbundel zu (s). Zeige, dass die Linienbundel L_D und $L_{(s)}$ isomorph sind.

Aufgabe 4. (Fortsetzung). Zeige, dass Linienbundel L_D auf $P^1(\mathbb{C})$ durch den Grad des Divisors D klassifiziert sind.

Aufgabe 5. Berechne die Multiplizität an der Stelle $0 \in \mathbb{C}^2$ von $f = \sin(x + y^2)^3 + \sin(y + x^2)^2$.

Aufgabe 6. (Fortsetzung). Konstruiere auf einer Umgebung U von $0 \in C^2$ eine holomorphe Funktion $F = y^2 + a(x)y + b(x)$ derart, dass F/f und f/F auf U holomorph sind.