Prof. N. A'Campo Fruehlingssemester 2008

Übungen zur Vorlesung Riemansche Flaechen

2. Aufgabenblatt

Aufgabe 1. Wir definieren das Paar $(\hat{\mathbb{Z}}, i)$, wobei $\hat{\mathbb{Z}}$ ein Ring und i ein Ringhomomorphismus $i : \mathbb{Z} \to \hat{\mathbb{Z}}$ ist. Setze $\hat{\mathbb{Z}} := \{s = (s_k) \in \prod_{k \in \mathbb{N}, k>0} \mathbb{Z}/k\mathbb{Z} \mid s_k = s_{k+h} \operatorname{Mod} k,\ k, h \in \mathbb{N}_{>0},\ k|h\}$. Für $z \in \mathbb{Z}$ setze $i(z) := (s_k), s_k = z \operatorname{Mod} k$. Bestimme die Mächtigkeit von $\hat{\mathbb{Z}}$. Zeige, dass i injektiv ist.

Aufgabe 2. Zeige, dass $\hat{\mathbb{Z}}$ abgeschlossen in $\prod_{k \in \mathbb{N}, k>0} \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ ist. Zeige, dass $\hat{\mathbb{Z}}$ kompakt ist. Zeige, dass $\mathbb{Z} = i(\mathbb{Z})$ in $\hat{\mathbb{Z}}$ dicht ist.

Aufgabe 3. Sei $\bar{\mathbb{Q}}$ der algebraische Abschluss von $\mathbb{Q}$. Wir definieren die Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ als

$$\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) := \{\sigma = (\sigma_K) \in \prod_{K \subset \bar{\mathbb{Q}}, dim_{\mathbb{Q}} K < +\infty} \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}) \mid \sigma_H|_K = \sigma_K, K \subset H\}$$

Beschreibe $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ als kompakte topologische Gruppe.

Aufgabe 4. Sei $Q_{\mathrm{Ab}} \subset \hat{\mathbb{Q}}$ der kleinste Unterkörper, in dessen die Gleichungen $t^k - 1 = 0, k \in \mathbb{N}, k > 0$, Nullstellen haben. Definiere $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_{Ab}/\mathbb{Q})$ als topologische Gruppe. Zeige, dass die Gruppen $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_{Ab}/\mathbb{Q})$ und die multiplikative Gruppe $\hat{\mathbb{Z}}^*$ isomorph sind.

Aufgabe 5. Wir definieren recursiv die Chebyshev Polynome $T_n(t), n \in \mathbb{N}$ mit Verankerung $T_0(t) = 1, T_1(t) = t, T_2(t) = 2t^2 - 1$ und Recurrenzrelation $T_n(t) = 2tT_{n-1}(t) - T_{n-2}(t), n > 1$. Zeige: $\cos(n\theta) = T_n(\cos(\theta))$. Zeichne $T_n^{-1}([-1, 1])$.

Aufgabe 6. Sei $P_\pm(t) = t^3(t^2 - 2t + \frac{1}{7}(34 \pm \sqrt{21}))$. Bestimme die Menge der kritischen Werte $KW(P_\pm)$. Bestimme $P_\pm^{-1}([0, s]), s \neq 0, s \in KW(P_\pm)$.